MENGENLEHRE
bei matherockt.de

"Die Bourbakianische Grundlage der Mathematik" stand in großen gelben Druckbuchstaben über der Tür.
"Aha, hier finden wir also die ... ähm ... Axiome", sagte Max, als er den Raum betrat.

"Mh, ich nehme mal an, hier geht es um Mengen", erwiderte Emmy.
"Ach ja, die Bourbakianer, das waren ja die vielen französischen Mathematiker, die ein Mathelehrbuch von den Grundlagen an schreiben wollten. Und was macht dann der Frisör hier?"
Max zeigte auf ein Foto eines altertümlichen Frisörsalons.

"Oh, genauer gesagt ist das ein Barbier, ein Herrenfrisör. Das Bild spielt auf das Barbier-Paradoxon an."
"Klar, das kenne ich. Der Barbier von Sevilla rasiert alle Männer von Sevilla, nur nicht die, die sich selbst rasieren. Rasiert der Barbier von Sevilla sich selbst? Weißt du es?"
"Mal nachdenken: Rasiert sich der Barbier selbst, dann ist er einer der Männer, die sich nicht selbst rasieren. Rasiert er sich nicht selbst, dann wird er aber vom Barbier, sich selbst, rasiert. Das ist ja doof."

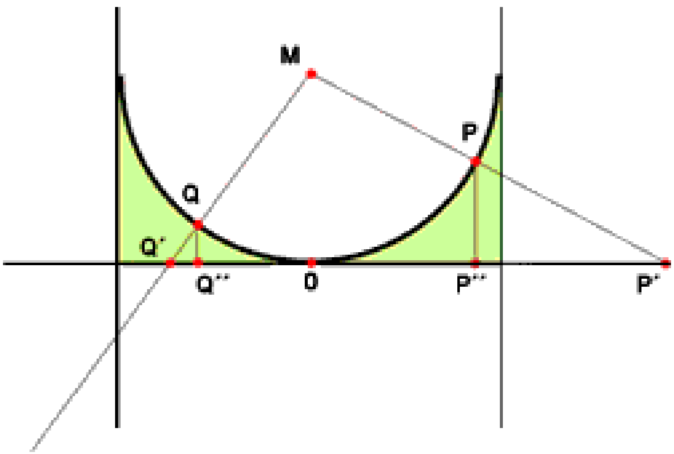
"Und was hat das mit Mengenlehre zu tun?"
"Naja, so genau weiß ich das auch nicht. Nur so viel: Sagt man einfach wie gewohnt, eine Menge ist eine Zusammenfassung von Dingen, dann ergibt sich ein Paradoxon, die Rusellsche Antinomie. Die funktioniert genauso wie die Barbiergeschichte. Man kann aber Axiome für Mengen angeben." (siehe matherockt-Galerie-Axiome.pdf)

Während Max den Zettel faltete und in seine Tasche steckte, lief Emmy schnurstracks zu dem großen gedeckten Tisch in der Mitte des Raumes.

"Entschuldigung, kann ich etwas bestellen?", fragte sie den Kellner, der gerade damit beschäftigt war, Löffel zu verteilen.
"Oh, ich fürchte, hier gibt es kein Essen, ich räume den ganzen Tag Löffel hin und wieder weg."
"Und warum das? Ist das nicht langweilig?"
Weil der Kellner weiter Löffel verteilte und nicht mehr mit Emmy sprach, erzählte Max ihr seine Vermutung

"An jedem Teller liegt eine Gabel. Die Menge der Gabeln und die Menge der Teller sind also gleich groß."
Emmy unterbrach ihn.
"Ja das ist ja klar, für jeden Teller gibt es eine Gabel und für jede Gabel gibt es einen Teller. Ach so, und der Kellner macht den Löffeltanz, um zu zeigen, dass die Menge der Löffel kleiner ist. Es gibt zwar für jeden Löffel einen Teller, aber nicht für jeden Teller einen Löffel. Hier an diesem Teller liegt zum Beispiel kein Löffel."

Emmy stand noch neben dem Tisch und war traurig, dass es nichts zu essen gab, als Max sie zu sich rief.
"Guck mal, das ist interessant!



Daran kann man sehen, dass eine Strecke und eine Gerade gleich viele Punkte haben."
"Aber die Strecke ist doch nur ganz kurz und die Gerade geht ewig weiter!"
"Ja, aber trotzdem haben sie beide genauso viele Punkte wie der Halbkreis. Und dann muss natürlich die Strecke genauso viele Punkte haben wie die Gerade."

Emmy starrte das Bild eine Weile an. Daran konnte sie sich nicht erinnern.
"Ich sehe, was du meinst. Die Strecke hat genauso viele Punkte wie der Halbkreis, weil einfach übereinanderliegende zusammengehören. Genauso wie Teller und Gabel. Und Gerade und Halbkreis haben gleich viele Punkte, weil diejenigen zusammen gehören, die auf dem gleichen Strahl liegen. Du musst also recht haben. Aber glauben kann ich´s nicht recht. Obwohl, eigentlich ist es ja klar. Beide haben unendlich viele Punkte und Unendlich ist ja gleich Unendlich."
"Wirklich?"

"Oh Max, Moment. Unendlich ist überhaupt nicht gleich Unendlich. Zum Beispiel gibt es mehr reelle Zahlen als natürliche."
"Na, das muss ja auch so sein, jede natürliche Zahl ist ja auch eine reelle Zahl, aber 1/2 ist zwar reell, aber trotzdem keine natürliche Zahl."

Natürliche Zahlen: 1,2,3,...,173,174,....

Rationale Zahlen: Alle Bruchzahlen, z.B. 1/2, 2/3, 123/238476. Aber auch -5/7

Relle Zahlen: Alle Kommazahlen, z.B. 1.0, -5.7, 2134.394857, Wurzel(2)=1.4142..., Pi=3.1415...

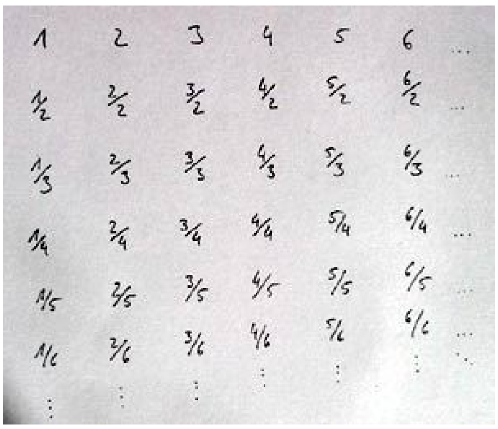
Zu den Rellen Zahlen gehören die rationalen und die irrationalen Zahlen.

"Max, ich glaub, so einfach ist das nicht mit dem Unendlichen. Das, was du gerade mit den reellen Zahlen gemacht hast, kann man auch für rationale Zahlen machen. Aber trotzdem gibt es davon genauso viele wie natürliche!"
"Und das soll ich dir glauben?"

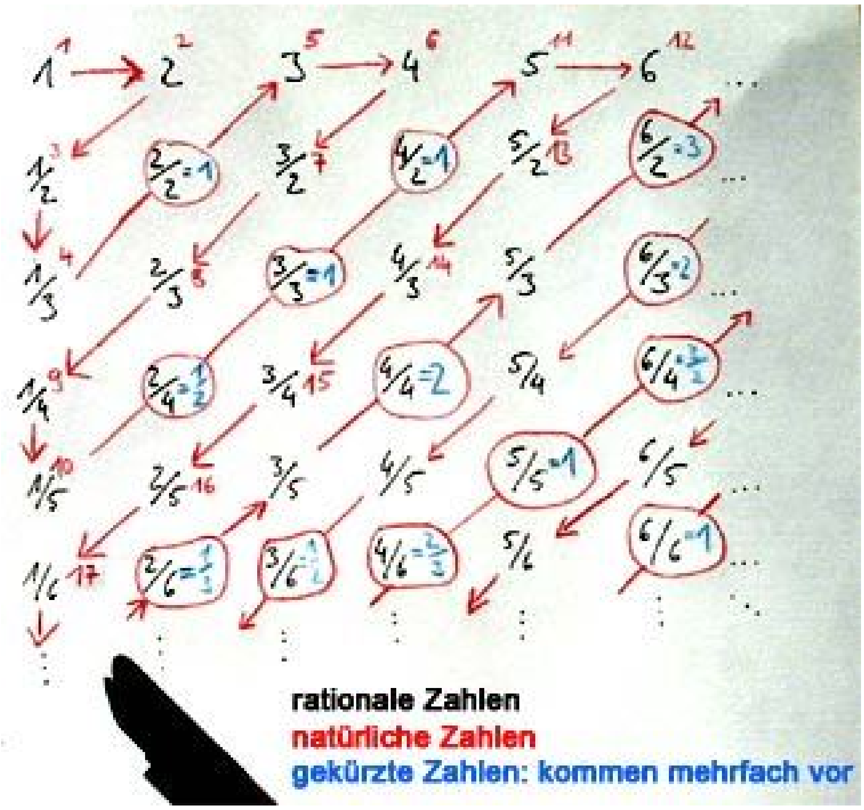
"Dafür soll es ganz einfache und wunderschöne Beweise geben. Cantorsches Diagonalverfahren oder so. Das lesen wir heute abend noch mal in Ruhe nach."
"Ja, das war fürs Erste verwirrend genug."

Die Cantorschen Diagonalverfahren

Nachdem Emmy und Max gemeinsam gekocht und gegessen hatten, holte Emmy einen Zettel und einen Stift und fing an, rationale Zahlen in einem quadratischen Muster aufzuschreiben. In jeder Zeile hatten die Zahlen den gleichen Nenner und in jeder Spalte den gleichen Zähler.

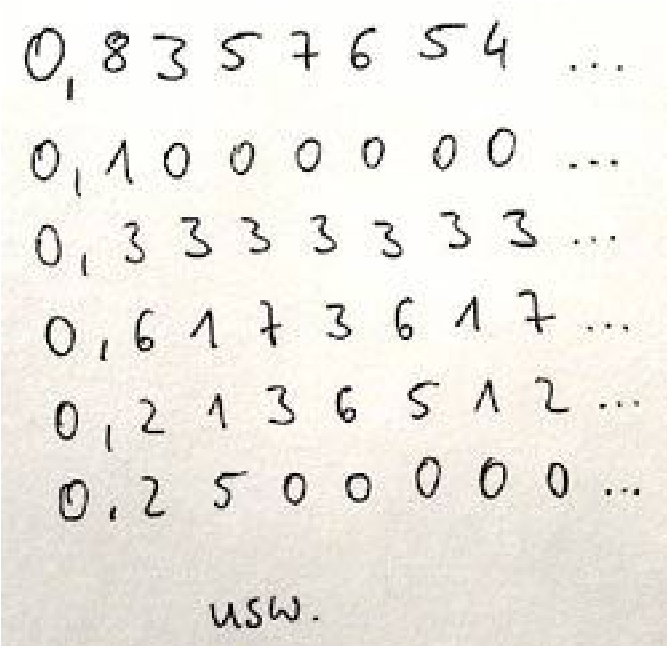


"Wenn ich das immer so weitermache, stehen alle rationalen Zahlen in dieser unendlichen Tabelle. Und jetzt kann ich sie einfach abzählen. Ich fange mit der Eins oben links an und zähle immer in Richtung der Pfeile."



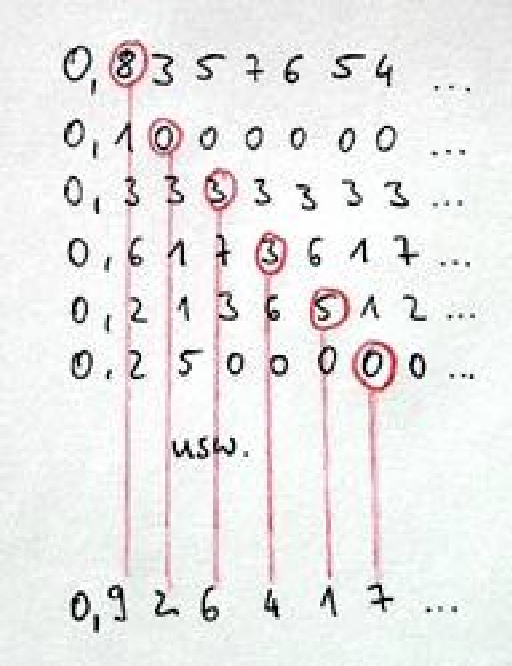
"Stimmt, wenn ich das unendlich aufmale, gibt es für jede rationale Zahl eine natürliche und umgekehrt. Wie mit den Gabeln und den Tellern. Und woher weiß ich, dass es nicht ein genauso geschicktes Verfahren für die reellen Zahlen gibt?"
Emmy nahm einen neuen Zettel und schrieb viele Kommazahlen (mit der Null vor dem Komma) untereinander.

"Wenn es dafür ein Verfahren gäbe, dann könnte ich alle rellen Zahlen in eine Liste schreiben. Ich habe hier mal irgendwie angefangen.



Es ist aber völlig egal, wie genau ich die Liste schreibe, ich kann immer eine Zahl basteln, die noch nicht drin steht. Vor dem Komma steht eine Null. An die erste Stelle nach dem Komma schreibe ich eine andere Ziffer als die erste Ziffer nach dem Komma von der ersten Zahl in meiner Liste.

An die zweite Stelle nach dem Komma schreibe ich eine andere Ziffer als die zweite Ziffer nach dem Komma von der zweiten Zahl in meiner Liste. Und immer so weiter."



Max dachte nach.
"Ja, dann unterscheidet sich meine neue Zahl an der hundertsten Stelle von der hundertsten Zahl in meiner Liste. Sie kann also nicht gleich der hundertsten Zahl sein. Genauso kann sie nicht die 5763te und die 3450456234te sein. Sie kann gar nicht in meiner Liste stehen!"
"Genau. Es ist also wie mit den Löffeln und den Tellern: Ich habe zwar für jede natürliche eine reelle Zahl, aber nicht für jede relle eine natürliche. Anders gesagt: Ich kann die rellen Zahlen nicht abzählen."

"Oh, und das obwohl in der Liste nur Zahlen zwischen Null und Eins stehen. Es gibt also schon mehr relle Zahlen zwischen Null und Eins als natürliche! Unglaublich."
Gemeinsam beschlossen sie, genug Mathematik für einen Tag erlebt zu haben, schauten noch einen Film und fielen todmüde in ihre Betten.