LOGIK

bei matherockt.de

Emmy war schon an der Tür vorbei gelaufen, aber Max stand noch irritiert vor dem kleinen Schildchen daneben.

"Je mehr Käse, desto mehr Löcher. Je mehr Löcher, desto weniger Käse. Ergo: Je mehr Käse, desto weniger Käse", stand da.

"Jeder Schritt klingt logisch, aber insgesamt macht es keinen Sinn," sagte Max. Emmy kam zurück, warf einen schnellen Blick auf das Schild und öffnete die Tür. Als sie einen Fuß über die Schwelle setzen wollte, standen zwei kleine Mädchen mit blonden Zöpfen direkt vor ihr und reichten ihr einen Zettel. Max drängelte nach und las mit.

"Wir sind Zwillinge. Eine von uns sagt immer die Wahrheit, eine von uns lügt immer. Ihr müsst euch entscheiden, wo ihr lang wollt. In der einen Richtung wartet ein Eimer kaltes Wasser auf euch, in der anderen Richtung die Logikausstellung. Ihr habt aber nur eine Frage."
Max grinste plötzlich und beugte sich zu einem der Mädchen hinab und flüsterte ihr etwas ins Ohr.
"Rechts", lautete die Antwort. Max ging schnurstracks nach links und stand in der Logikausstellung. Emmy lief ihm hinterher und wollte wissen, was Max gefragt hat. Aber er verriet es nicht.

Anmerkung der Redaktion: Die Lösung könnt ihr mit einer E-mail an zwillinge(at)matherockt.de erfragen.

In dem kahlen Raum mit vereinzelten Bildern an den Wänden stand nur ein Tisch in der Mitte. Am Rand des Tisches lag ein großes M, daneben ein I.

Über den Tisch verteilt lagen weitere I's und auch U's. Eine Tafel mit der Anleitung hing neben dem Tisch.

Das MU-Rätsel

Auf dem Tisch habt ihr drei Symbole: M, I und U. Die Is und Us könnt ihr nach bestimmten Regeln hinlegen und wegnehmen.

In der Ausgangssituation steht "MI" auf dem Tisch. Gibt es eine Möglichkeit "MU" daraus zu machen? Hier die Regeln, mit denen ihr legen und wegnehmen dürft:

Regel 1: Wenn hinten ein I steht, darf ein U angefügt werden (z.B. darf MUI zu MUIU gemacht werden.)

Regel 2: Die Zeichenkette nach dem M darf verdoppelt werden. (z.B. darf MUI zu MUIUI gemacht werden.)

Regel 3: Drei Is dürfen durch ein U ersetzt werden (z.B. darf MIIIU zu MUU gemacht werden.)

Regel 4: Zwei direkt aufeinander folgende Us dürfen gestrichen werden (z.B. darf MIUUUI zu MIUI gemacht werden.)

Die Regeln dürfen in beliebiger Reihenfolge, auch mehrmals hintereinander angewendet werden.

Beispiel:
1. MI
2. MII (Regel 2)
3. MIIII (Regel 2)
4. MIIIIU (Regel 1)
5. MUIU (Regel 3)
6. MUIUUIU (Regel 2)
7. MUIIU (Regel 4)

Viel Spaß beim Verlängern und Verkürzen des MI!

Emmy und Max versuchten sich eine ganze Weile an dem Rätsel. Sie legten und entfernten Is und Us. Gelegentlich hatten sie den ganzen riesigen Tisch mit Zeichen voll gelegt, um sie danach in anderer Reihenfolge wieder wegzunehmen. Aber ein MU gelang ihnen nicht. Emmy hatte genug und wollte gehen. Als sie sich umdrehte, stand eines der Zwillingsmädchen hinter ihnen und reichte ihr einen Zettel.

"Solange ihr im M-I-U-System bleibt, werdet ihr das Rätsel nicht lösen, denn es ist unentscheidbar. Aber ihr könnt ja euren Kopf einschalten. Denkt über die Anzahl der Is nach", las Emmy vor.

"Mit den Regeln 1 und 4 ändert sich die Anzahl der Is nicht", sagte Max.
Sie starrten ratlos auf den Tisch, bis das blonde Mädchen Max antippte und ihm einen neuen Zettel reichte:

"Wie sieht es mit der Teilbarkeit durch drei aus?"

"Moment, das kann ich: Am Anfang haben wir ein I. Eins ist nicht durch drei teilbar. Wenn wir kein I haben wollen, müssen wir vorher drei gehabt haben, die wir dann wegnehmen dürfen. Drei ist natürlich durch drei teilbar", sagte Max.
"Oh, und wenn wir die Regeln 2 und 3 anwenden, bekommen wir nur eine durch drei teilbare Zahl, wenn wir vorher auch schon eine hatten. Denn nach Anwendung von Regel 2 haben wir hinterher doppelt so viele Is. Wenn man durch Verdoppeln eine durch drei teilbare Zahl bekommt, muss sie vorher auch durch drei teilbar gewesen sein. Und mit Regel 3 verringern wir die Zahl der Is um drei. Wenn dabei eine durch drei teilbare Zahl rauskommt, war die Ausgangszahl auch durch drei teilbar."

Emmy war verwirrt: "Sind wir schon fertig?"

"Klar, durch keine der Regeln erhalten wir eine durch drei teilbare Anzahl von Is, wenn wir nicht vorher schon eine durch drei teilbare Zahl hatten. Wir gehen aber von einem I aus und wollen am Ende keins haben."

Emmy dachte nach. "Also ist das Rätsel nicht lösbar. Puh, anstrengend war es trotzdem."

Max sah sich noch einmal um und ging dann zum Ausgang. Dort steckten ihnen die beiden kleinen Mädchen noch eine Broschüre "Kurt Gödel und das MU-Rätsel" zu. Emmy wollte sie schon aufschlagen und lesen, aber Max meinte, das hätte auch bis zum nächsten Tag Zeit. Also machten sie sich weiter auf in die Gänge der Mathe-rockt-Galerie.

Anmerkung der Ausstellungs-Macher: Das MU-Rätsel stammt aus dem Buch "Gödel, Escher, Bach - ein unendlich geflochtenes Band." von Douglas R. Hofstadter. In diesem Buch ist sehr ausführlich Gödels Unvollständigkeitssatz ausgeführt. Es ist nicht ganz einfach, aber sehr nett geschrieben und mit vielen Episoden aus dem Leben von Achilles und der Schildkröte gespickt.

Kurt Gödel und das MU-Rätsel

Was haben wir beim MU-Rätsel? Erstmal drei Symbole: M,I,U. Diese können aneinandergereiht werden, es entsteht die MIU-Sprache. MUUIUM ist eine Aussage der MIU-Sprache.

Außerdem haben wir ein Axiom "MI" und 4 Regeln.
Die MIU-Sprache wird damit zu einem formalen System erweitert: Ausgehend von Axiomen (hier einem Axiom) können nach Regeln neue richtige Aussagen gewonnen werden.

In der Sprache können dann Aussagen formuliert werden, zum Beispiel MI und MUM, die richtig sein können oder falsch.
Dass MI richtig ist wissen wir, denn es ist Axiom.

MUM dagegen muss falsch sein, denn es gibt keine Regel, die ein weiteres M zulässt. Wie wird nun entschieden, ob eine Aussage wahr

oder falsch ist?
Genauso wie in der Mathematik, durch Beweise.

Allerdings bietet das M-I-U-Systems wenige Möglichkeiten. Es besteht ja nur aus 4 Regeln, mit denen Symbole dazugeschrieben oder weggenommen werden können. Alles was an Beweisstrategie bleibt, ist also probieren.

Das heißt von MI ausgehen und nach und nach Regeln anwenden. Wenn die zu überprüfende Aussage irgendwann erscheint, ist sie bewiesen. Anders sieht es aus, wenn die Aussage falsch ist. Dann nutzen alle Versuche nichts, die Aussage wird nie erscheinen. Und es gibt innerhalb des M-I-U-Systems keine Möglichkeit, dies zu beweisen.

Deshalb ist es nicht möglich innerhalb des Systems mit Sicherheit sagen zu können, ob eine Aussage richtig oder falsch ist. Dass noch kein Beweis gefunden wurde, heißt ja nicht sofort, dass die Aussage falsch ist, vielleicht wurde einfach noch nicht lange genug probiert. Es gibt also unentscheidbare Aussagen. Dazu gehört zum Beispiel MU.

Nun ist es aber durchaus möglich festzustellen, dass MU falsch ist. Allerdings muss dazu das System erweitert werden. Nimmt man die Zahlentheorie hinzu und zählt, wie viele Is in einer Aussage stecken, ist es nicht schwer zu zeigen, dass MU falsch ist. Aber damit entstehen andere Aussagen, die nicht entscheidbar sind.

Dieses frappierende Ergebnis hat Kurt Gödel 1931 bewiesen: Ein genügend komplexes System (und dazu reicht die Zahlentheorie) kann nicht zugleich widerspruchsfrei und vollständig sein. "Vollständig" heißt dabei, dass man für jede Aussage entweder beweisen kann, dass sie wahr oder falsch ist. Bewiesen hat Kurt Gödel diesen "Unvollständigkeitssatz" mit Mitteln der Zahlentheorie.

Er hat also innerhalb eines Systems bewiesen, dass es in dem gleichen System entweder wahre Aussagen gibt, die nicht beweisbar sind, oder Aussagen, für die man sowohl ihre Gültigkeit, als auch ihre Ungültigkeit beweisen kann!

André Weil (einer der Bourbakianer) hat daher gesagt: "Gott existiert, weil die Mathematik widerspruchsfrei ist, und der Teufel existiert, weil wir das nicht beweisen können."

Übrigens wäre Kurt Gödel im Jahr 2006 100 Jahre alt geworden, wäre er nicht 1978 sehr tragisch gestorben: Als Sechsjähriger hatte er eine schlimme Krankheit: rheumatisches Fieber. Von da an hatte Kurt Zeit seines Lebens panische Angst vor Krankheiten. Später kam noch Paranoia dazu. Er weigerte sich zu essen, wenn seine Frau Adele nicht vorher mit dem gleichen Besteck gekostet hatte. Als Adele selbst krank wurde und ins Krankenhaus musste, verweigerte er jede Nahrungsaufnahme und starb an Unterernährung.