AXIOME

bei matherockt.de

Axiome sind Aussagen. In der Mengenlehre zum Beispiel:

Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente haben.

Ich stelle mir Axiome als Spielregeln für das Spiel "Mathematik" vor. Solche Regeln brauchen wir, um Mathematik zu betreiben. Hätten wir sie nicht, könnte ich immer weiter fragen: Warum, warum, warum?
So einigen wir uns auf Axiome, die wir glauben können und mit denen wir möglichst gut umgehen können. Also:

Axiome sind Aussagen, die von einem wissenschaftlichen System nicht begründet werden. Sie werden nicht bewiesen. Die Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler einigen sich, die und die Axiome zu benutzen.

Bei dem Beispiel fällt mir das Glauben nicht schwer und eigentlich auch niemandem anders?

Ich möchte euch das prominenteste Axiomensystem der Mengenlehre vorstellen, es heißt ZFC:

WIE ES ZU ZFC KAM

Cantors Paradies

Georg Cantor (1845-1918) begründete Ende des 19. Jahrhunderts maßgeblich die Mengenlehre. Es war eine fast lückenlose Theorie. Deswegen sprach David Hilbert (1862-1943) von einem Paradies, das Georg Cantor uns geschaffen hat.
Georg Cantor hat uns zum ersten Mal gesagt, was eine 'Menge' eigentlich ist. Diese Beschreibung ist immer noch die Beste, um sich 'Menge' intuitiv vorzustellen.

Cantor meinte: "Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens."
[Zitiert nach: Ilgauds, Hans Joachim / Purkert, Walter (1987): Georg Cantor. Basel. S.158.]

Die Kerbe in Cantors Paradies

Klingt logisch, aber daraus ergibt sich die sogenannte Russelsche Antinomie: Vielleicht ist die Barbier-Geschichte die geläufigste Variante dieses Paradoxons. Historisch hat die Frage nach der Menge aller Mengen das "Cantorsche Paradies" lädiert. Mehr dazu beim Fundierungsaxiom.

Georg Cantor hat das Problem auch selbst entdeckt, Ernst Zermelo (1871-1953, er liefert das Z vom ZFC) auch, was gern vergessen wird, und Bertrand Russell (1872-1870) schließlich hat die Kerbe tiefer in das Cantor-Paradies getrieben und versucht, sie wieder zu reparieren.
Natürlich haben alle versucht, diese Lücke zu schließen.

ZFC

Ganz kurz: Heraus kam ZFC, das uns Thoralf Skolem (1887-1963) 1922 geschenkt hat, was auch oft vergssen wird. Er hat die Ergebnisse von Ernst Zermelo und Abraham Fraenkel (1891-1965, das F in ZFC) zusammengefasst plus Auswahlaxiom. Vom Auswahlaxiom, das auf englisch 'axiom of choice' heißt, kommt das C und nicht von Cantor, wie ich als Schülerin immer dachte, naja.

Dabei wurde vermieden genau zu sagen, was eine Menge nun genau sei. Das Axiomensystem ZFC gibt uns wenigstens eine Menge und sagt uns, wie wir aus Mengen wieder neue Mengen konstruieren können. Und mit Hilfe der ZFC-Axiome können wir beweisen, dass gewisse Objekte Mengen sind! Was für Mengentheoretiker klar ist: Elemente von Mengen sind selbst immer Mengen. Für alle anderen ist das schwieriger: Ich habe länger dazu gebraucht, aber schließlich ging es.

Neben den Mengen gibt es noch Klassen. Eine Klasse ist eine Ansammlung von Mengen, die alle eine spezielle Eigenschaft von Mengen haben. Eine solche Eigenschaft von Mengen könnte zum Beispiel einfach sein, Menge zu sein. Dann haben wir die Klasse aller Mengen. Und die ist nach dem Fundierungsaxiom keine Menge. Zu solchen Klassen sagen wir echte Klasse.

Und was ist so besonders an dem Axiomensystem ZFC? Ganz viel Mathematik, die wir in der Schule lernen, können wir aus diesem System folgern!

HIER NUN DIE ZFC-AXIOME

Nullmengenaxiom

Es gibt eine Menge, die keine Elemente hat.

$\emptyset$ Mir leuchtet das sofort ein. Ich denke an ein Vakuum, dass in einem Weltraumforschungslabor erzeugt wird, um irgendwas zu testen.

Extensionalitätsaxiom

Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente haben.

Fundierungsaxiom

Jede nichtleere Menge M enthält ein Element M mit dem es keine gemeinsamen Elemente hat (also: M geschnitten M = leere Menge).

Warum wir das Axiom brauchen:
Dieses Axiom ist sehr wichtig, um die Russellsche Antinomie zu reparieren. 1902 hat Bertrand Russell an Gottlob Frege (1848-1925) einen Brief geschrieben. Gottlob war damit beschäftigt ein Axiomensystem zu veröffentlichen. Bertrand fragte nun Gottlob, was denn in seinem Axiomensystem mit der Menge ist, in der alle Mengen drin sind, die sich selbst nicht enthalten. Mit der gibt es nämlich dieses Problem:
Enthält sie sich nicht selbst, ist sie eine von den Mengen, die sich nicht selbst enthalten und enthält sich also selbst.
Enthält sie sich aber selbst, ist sie also genauso wie alle Mengen, die in ihr drin sind, eine Menge, die sich nicht selbst enthält.
Wie ich es auch drehe, ich erhalte einen Widerspruch. Das ist blöd. Gottlob hat diese Lücke sofort eingesehen und das auch in seine Veröffentlichung reingeschrieben. Man sagt, dass er letztlich gar aufgegeben hat, die Lücke zu reparieren.
Das Axiom verhindert, dass eine solche Zusammenfassung von Mengen überhaupt eine Menge ist. Es ist für jede Menge verboten sich selbst zu enthalten.

Paarmengenaxiom

Zu je zwei Mengen existiert eine Menge, die genau diese beiden enthält. also: Sind A und B Mengen, so ist auch {A,B} eine Menge.

Potenzmengenaxiom

Wenn M eine Menge ist, so gibt es eine Menge P(M), die genau die Teilmengen von M als Elemente hat.

Vereinigungsaxiom

Ist M eine Menge, dann bilden alle Elemente die in den Mengen in M enthalten sind (die Vereinigung über M) wieder eine Menge.

Unendlichkeitsaxiom

Es gibt eine nichtleere Menge M für die gilt: ist A in M, so ist auch A vereinigt {A} in M.

Dieses Axiom sichert uns eine unendliche Menge!

Aussonderungsaxiom

Ist E eine Eigenschaft von Mengen und M eine Menge, so bilden diejenige Elemente von M, die die Eigenschaft E haben, selbst eine Menge.

Wenn unsere Menge alle Äpfel irgendeines Bauern sind und die Eigenschaft ist, rot zu sein, dann bilden sicher die roten Äpfel des Bauerns wieder eine Menge.

Ersetzungsaxiom

Ist A eine Menge und F eine Funktion von A nach B, so ist F[A] eine Menge.

Das Ersetzungsaxiom braucht man nur für den Fall, dass man nicht genau weiß, ob B eine Menge ist (B könnte eben auch echte Klasse sein und das ist für B nicht verboten!). Wenn wir aber wissen, dass B eine Menge ist, reicht das Aussonderungsaxiom, um zu wissen, dass F[A] eine Menge ist. Überlegt mal!

Das waren die Axiome von Zermelo und Fraenkel. Hier noch das Auswahlaxiom:

Auswahlaxiom

Zu jeder Menge **M** von nichtleeren, paarweise disjunkten Mengen, gibt es eine sogenannte Auswahlmenge. Die Auswahlmenge ist eine Menge, die mit jedem M aus **M** genau ein Element gemeinsam hat.

Das Auswahlaxiom ist das Axiom, dass sich am Schwersten glauben und vorstellen lässt. Ich stelle mir immer Luftballons gefüllt mit Konfetti vor. Habe ich die Möglichkeit, die Luftballons aufzuzählen mache ich das enfach: Ich nehme mir einen Luftballon her schreibe ne 1 drauf, nehm ihm ein Konfetti weg, wo ich auch 1 drauf schreib, nehm den nächsten, schreibe 2 drauf nehme eine Konfetti und so weiter.
Jetzt stelle ich mir vor, dass ich soviele Luftballons habe, dass ich sie nicht mehr aufzählen kann (vergleiche Cantors Diagonalverfahren) . Also stelle ich mir überabzählbar viele Luftballons vor. Jetzt gibt mir das Auswahlaxiom einen Luftballon, in dem aus jedem meiner nicht aufzählbaren Luftballons genau ein Konfetti drin ist. Ich glaube, dass das geht!